GV: PHÙNG V. HOÀNG EM

ÔN GIỮA KỲ

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Môn: Toán – ĐẠI SỐ 10

****

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. **Công thức cơ bản.**

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, suy ra: $\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$ và $\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$;
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, suy ra: $\boxed{\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}}$
- $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, suy ra: $\boxed{\sin^2 x = \dfrac{1}{1 + \cot^2 x}}$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $\tan x . \cot x = 1$.

2. **Công thức cộng.** (*Dùng để tách góc, hoặc ghép góc*)

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

3. **Công thức góc nhân đôi.** (*Dùng để giảm góc*)

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
- $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

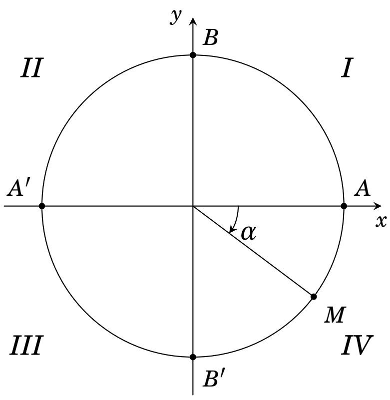
4. **Công thức hạ bậc.** (*Dùng để làm mất bình phương*)

- $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.
- $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.
- $\tan^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. **Dấu của các tỉ số lương giác tương ứng trên các góc phần tư.**

Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một góc α ta xác định vị trí điểm cuối của cung $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác. Điểm M thuộc góc phần tư nào thì ta áp dụng bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác.

	Góc phần tư			
Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−



B. CÁC DẠNG TOÁN TỰ LUẬN

Dạng 1. Cho trước 1 tỉ số lượng giác, tính các tỉ số lượng giác còn lại

1. Ta thực hiện theo các bước:
   - Sử dụng công thức thích hợp để tính tỉ số tiếp theo (chú ý nhóm công thức cơ bản);
   - Ứng với miền của α đề cho, xem Mục 5. để chọn kết quả đúng.
   - Tính toán các tỉ số còn lại.
2. Nếu đề cho trước 1 tỉ số lượng giác, yêu cầu tính giá trị biểu thức. Ta thường biến đổi biểu thức đó về giá trị đã cho. Sau đó, thay kết quả.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Biết $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Tính giá trị của $\cos\alpha$; $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

Lời giải.

Từ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

- Do $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ nên $\cos\alpha < 0$. Suy ra $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = -2\sqrt{2}$.

□

Ví dụ 2

Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$

- Do $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ nên $\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{-4}{5} = \dfrac{-24}{25}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = -\dfrac{24}{7}$

□

Ví dụ 3

Cho $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$, với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$ và $\cos 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + \dfrac{9}{16} = \dfrac{25}{16} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{16}{25}$.

- $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$.
- Do $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0$, do đó $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.
- Do $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$, do đó $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.
  - $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\dfrac{24}{25}$
  - $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{7}{25}$

□

Ví dụ 4

Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) + 2\tan\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Lời giải.

Áp dụng công thức cộng, ta có $P = \cos\dfrac{9\pi}{2}.\cos\alpha + \sin\dfrac{9\pi}{2}.\sin\alpha = \sin\alpha - 2\cot\alpha$.

- $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$
- Do $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{4}{3}$
- Suy ra, $P = \sin\alpha - 2\cot\alpha = \dfrac{49}{15}$.

□

Ví dụ 5

Cho $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $B = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha}$.

Lời giải.

Ta biến đổi biểu thức B về $\tan\alpha$ như sau:

$$B = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \dfrac{3\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \dfrac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}} = \frac{\tan\alpha\left(\tan^2\alpha + 1\right) - \left(\tan^2\alpha + 1\right)}{\tan^3\alpha + 3 + 2\tan\alpha\left(\tan^2\alpha + 1\right)} = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27 + 3 + 2.3(9+1)} = \frac{2}{9}.$$

□

LUYỆN TẬP 1

Bài 1. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

Bài 2. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α, biết

a) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $90^0 < \alpha < 180^0$;

b) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α, biết

a) $\tan\alpha = 2$ và $\pi < \alpha < 2\pi$;

b) $\cos\alpha = 0,8$ và $\tan\alpha + \cot\alpha > 0$.

Bài 4. Cho $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Bài 5. Cho $\tan\alpha = 3$ và $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Bài 6. Cho $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$; $\cos 2\alpha$ và $\sin\left(\alpha + \dfrac{19\pi}{4}\right)$.

Bài 7. Cho $\tan\alpha = -2$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{4}\right)$; $\cot\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

Bài 8. Cho $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$.

a) Tính $\tan\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

b) Tính $A = \dfrac{9\sin^2\alpha + \sqrt{5}.\tan\alpha}{5 + 6\cos\alpha}$

c) Tính $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha, \cot 2\alpha$.

d) Tính $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$ và $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

Bài 9. Cho $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $\tan(-\alpha)$.

Bài 10. Cho $\tan\alpha = 2$, tính giá trị biểu thức $M = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Bài 11. Cho $\cot\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$.

Bài 12. Cho $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{\tan\alpha + 3\cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}$.

Bài 13. Cho $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức hoặc chứng minh đẳng thức

1. Các phương pháp thường dùng:
   - Biến đổi vế phức tạp của đẳng thức về vế đơn giản;
   - Biến đổi tương đương để đẳng thức đi đến kết quả hiển nhiên đúng;
   - Phối hợp cả hai cách trên.
2. Chú ý:
   - Nếu trong đẳng thức, các góc đều giống nhau, ta ưu tiên nhóm công thức cơ bản (Nhóm 1);
   - Nếu trong đẳng thức, có xuất hiện góc gấp đôi và bình phương tỉ số lượng giác, ta ưu tiên nhóm nhân đôi và hạ bậc (Nhóm 3,4);
   - Nếu cần tách góc, ta ưu tiên nhóm công thức cộng (Nhóm 2).

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Rút gọn biểu thức:

a) $A=\sin^2 x+\sin^2 x\tan^2 x$; b) $B=\dfrac{2\sin^2 x-1}{\sin^2 x-\sin x\cos x}$. c) $A=\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+1\right)+\sin^4\alpha$

Lời giải.

a) $A=\sin^2 x+\sin^2 x\tan^2 x=\sin^2 x\left(1+\tan^2 x\right)=\sin^2 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\tan^2 x$.

b) $B=\dfrac{2\sin^2 x-1}{\sin^2 x-\sin x\cos x}=\dfrac{2\sin^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin x(\sin x-\cos x)}=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}=1+\cot x$;

c) $A=\sin^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)+\cos^2\alpha+\sin^4\alpha=\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^4\alpha=1$.

□

Ví dụ 2

Rút gọn các biểu thức:

a) $A=\dfrac{\sqrt{2}\cos a-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)}{-\sqrt{2}\sin a+2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)}$. b) $B=(\tan a-\tan b)\cot(a-b)-\tan a\tan b$.

Lời giải.

a) Ta có $A=\dfrac{\sqrt{2}\cos a-2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos a-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin a\right)}{-\sqrt{2}\sin a+2\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos a+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin a\right)}=\dfrac{\sqrt{2}\sin a}{\sqrt{2}\cos a}=\tan a$.

b) Ta có $B=\tan(a-b)(1+\tan a\tan b)\cot(a-b)-\tan a\tan b=1$.

□

Ví dụ 3

Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

a) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4\alpha$;

b) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\cot\alpha$;

c) $\dfrac{2+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=3\tan^2\alpha+2$;

d) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Lời giải.

a) $\text{VT}=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$
$=1-\dfrac{1-\cos 4\alpha}{4}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4\alpha=\text{VP}.$

b) $\text{VT}=\dfrac{1-\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}{2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha(2\cos\alpha-1)}{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha=\text{VP}.$

c) $\text{VT}=\dfrac{2+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{2+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}+\tan^2\alpha=2+2\tan^2\alpha+\tan^2\alpha=3\tan^2\alpha+2=\text{VP}.$

d) $\text{VT}=\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{2(1-\cos\alpha)}=\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\dfrac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{2(1-\cos\alpha)}$
$=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\text{VP}.$

□

Ví dụ 4

Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$P=\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}\cdot\cot x.$$

Lời giải.

- $P=\dfrac{2\sin^2x+2\sin x\cos x}{2\cos^2x+2\sin x\cos x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{2\sin x(\sin x+\cos x)}{2\cos x(\sin x+\cos x)}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=1.$
- Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của biến x.

□

LUYỆN TẬP 2

Bài 1. Không sử dụng MTCT, hãy tính giá trị $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \sin 75^\circ$ và $\cos 75^\circ$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{4\cos^2x-2}{\sin x+\cos x}$.

Bài 3. Rút gọn biểu thức $N=\sqrt{\sin^2x(4+\cot x)+\cos^2x(1+3\tan x)}$.

Bài 4. Rút gọn biểu thức $C=(\tan x-\cot x)^2-(\tan x+\cot x)^2$.

Bài 5. Đơn giản biểu thức

a) $A=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}$;

b) $B=\dfrac{1-\sin^2\alpha.cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha$.

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

b) $1-\cot^4\alpha=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin^4\alpha}$;

c) $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=1+2\tan^2\alpha$;

d) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

Bài 7. Đơn giản biểu thức

a) $A=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}$;

b) $B=\dfrac{1-\sin^2\alpha.cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha$.

Bài 8. Chứng minh các hệ thức sau

a) $\dfrac{1+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}=\dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$;

b) $\dfrac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$;

c) $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$;

d) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cot^2\alpha-\tan^2\alpha}=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Bài 9. Rút gọn giá trị của biểu thức sau:

a) $A=\cos(4\pi-\alpha).\tan(7\pi+\alpha)+\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(5\pi+\alpha)$;

b) $B=2\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)$;

c) $C=\sin(\pi+\alpha)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\tan(\pi-\alpha)\cot(-\alpha)$;

d) $D=\sin(5\pi+\alpha)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cot(4\pi-\alpha)$;

e) $E=\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cot\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

f) $F=\cot(\alpha-4\pi)\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos(\alpha+6\pi)-2\sin(\alpha-\pi)$.

Bài 10. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(1-\sin^2x).\tan^2x+(1-\cos^2x)\cot^2x=1$;

b) $1-\sin^2x-\sin^2x.\cot^2x=0$;

c) $\cos^4x+\sin^2x\cos^2x+\sin^2x=1$;

d) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2\cot x-\sin 2x}=\tan^2x$;

e) $\sin^4x+\sin^4x\cot^2x+\cos^4x+\cos^4x.\tan^2x=1$;

f) $\dfrac{1}{4}\tan x\left(\dfrac{1+3\cos^2x}{\sin x}-\sin x\right)=\cos x$;

g) $2\cot x\left(\dfrac{2\sin^2x+1}{\cos x}-\cos x\right)=6\sin x$;

h) $\tan^2x-\sin^2x\tan^2x+2\cos^2x+\sin^2x=2$;

Bài 11. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\dfrac{\sin^3x+\cos^3x}{\sin x+\cos x}=1-\sin x\cos x$;

b) $\dfrac{\sin^2x-\cos^2x}{1+2\sin x\cos x}=\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}$;

c) $(1+\cot x)\sin^3x+(1+\tan x)\cos^3x=\sin x+\cos x$;

d) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\cot x-\sin x\cos x}=2\tan^2x$;

e) $\dfrac{\sin^2x+2\cos^2x-1}{\cot^2x}=\sin^2x$;

f) $\dfrac{\sin^2x-\tan^2x}{\cos^2x-\cot^2x}=\tan^6x$;

g) $\cos^4x-\sin^4x=\cos 2x$;

h) $\cos^4x-2\cos^2x=\sin^4x-1$;

i) $\sin^4x+\sin^2x.\cos^2x+\cos^2x=1$;

j) $\dfrac{1-\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x}-\cos^2x=\tan^2x$.

Bài 12. Chứng minh rằng $\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}{1+\tan^4\alpha}$.

Bài 13. Chứng minh rằng biểu thức $B=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}+\cot^2 x\cot^2 y$ độc lập với $x;y$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Góc có số đo $1080°$ thì có số đo là bao nhiêu rađian?

(A) 6π. (B) 3π. (C) 12π. (D) 4π.

Câu 2. Tính số đo bằng rad của góc $22°30'$.

(A) $\dfrac{\pi}{8}$. (B) $\dfrac{7\pi}{12}$. (C) $\dfrac{9\pi}{12}$. (D) $\dfrac{5\pi}{12}$.

Câu 3. Tính số đo bằng độ của góc $\dfrac{\pi}{36}$.

(A) $6°$. (B) $8°$. (C) $5°$. (D) $10°$.

Câu 4. Đổi 2 rad ra độ.

(A) $=2°$. (B) $\left(\dfrac{360}{\pi}\right)^{\circ}$. (C) $360°$. (D) $180°$.

Câu 5. Giá trị của $\sin\dfrac{47\pi}{6}$ là

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6. Tìm số dương T nhỏ nhất thoả $\sin(x+T)=\sin x$ với mọi x.

(A) $T=\pi$. (B) $T=2\pi$. (C) $T=\dfrac{\pi}{2}$. (D) $T=4\pi$.

Câu 7. Cho x là số thực, hãy chọn mệnh đề **sai**.

(A) $-1\le\sin x\le 1$. (B) $\cos 2x\le 1$. (C) $\left|\sin 3x\right|\le 1$. (D) $-1\le\tan x\le 1$.

Câu 8. Chọn mệnh đề **sai** (với k là số nguyên tuỳ ý)?

(A) $\sin(x+k2\pi)=\sin x$. (B) $\cos(x+k\pi)=\cos x$. (C) $\tan(x+k2\pi)=\tan x$. (D) $\cot(x+k\pi)=\cot x$.

Câu 9. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

(A) $\sin(180°-a)=-\cos a$. (B) $\sin(180°-a)=-\sin a$.

(C) $\sin(180°-a)=\sin a$. (D) $\sin(180°-a)=\cos a$.

Câu 10. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

(A) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$. (B) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$. (C) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$. (D) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cot x$.

Câu 11. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

(A) $\tan(\pi-a)=\tan a$. (B) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=-\sin a$. (C) $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right)=-\tan a$. (D) $\sin(\pi+a)=\sin a$.

Câu 12. Đơn giản biểu thức $M=\cos\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(a-\pi)$ ta được kết quả nào sau đây?

(A) $M=\cos a+\sin a$. (B) $M=2\sin a$. (C) $M=\sin a-\cos a$. (D) $M=0$.

Câu 13. Cho góc lượng giác $\alpha=2017°$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin\alpha>0$ và $\cos\alpha<0$. (B) $\sin\alpha>0$ và $\cos\alpha>0$.

(C) $\sin\alpha<0$ và $\cos\alpha<0$. (D) $\sin\alpha<0$ và $\cos\alpha>0$.

Câu 14. Cho góc lượng giác $\alpha=\dfrac{2017\pi}{4}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin\alpha>0$ và $\cos\alpha<0$. (B) $\sin\alpha>0$ và $\cos\alpha>0$.

(C) $\sin\alpha<0$ và $\cos\alpha<0$. (D) $\sin\alpha<0$ và $\cos\alpha>0$.

Câu 15. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?

(A) $\cos 150° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\cot 150° = \sqrt{3}$. (C) $\tan 150° = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (D) $\sin 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?

(A) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$. (B) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. (C) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$. (D) $\cos\alpha + \sin\alpha = 1$.

Câu 17. Giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90° + 2\cos^2 60° - 3\tan^2 45°$ bằng

(A) $S = \dfrac{1}{2}$. (B) $S = -\dfrac{1}{2}$. (C) $S = 1$. (D) $S = 3$.

Câu 18. Đẳng thức nào sau đây là công thức **sai**?

(A) $\cos 2x = 1 - \sin^2 2x$. (B) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

(C) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. (D) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Câu 19. Đẳng thức nào sau đây là công thức đúng?

(A) $\sin 2x = 2\sin^2 x - 1$. (B) $\sin 2x = 1 - 2\sin^2 x$. (C) $\sin 2x = 1 - \cos^2 x$. (D) $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$.

Câu 20. Trong các giá trị sau đây, $\cos\alpha$ có thể nhận giá trị nào?

(A) $\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{7}{4}$. (C) $-0,7$. (D) $-1,2$.

Câu 21. Cho góc lượng giác $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin\alpha > 0$ và $\sin 2\alpha > 0$. (B) $\sin\alpha > 0$ và $\cos 2\alpha < 0$.

(C) $\cos\alpha < 0$ và $\cos 2\alpha < 0$. (D) $\cos\alpha < 0$ và $\sin 2\alpha > 0$.

Câu 22. Cho $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

(A) $-\dfrac{3}{5}$. (B) $\dfrac{3}{5}$. (C) $\dfrac{4}{5}$. (D) $-\dfrac{4}{5}$.

Câu 23. Cho $\cos 1350° = a$; $\sin 675° = b$. Nhận xét nào sau đây **sai**?

(A) $a = 0$. (B) $a > b$. (C) $a^2 + b^2 = 1$. (D) $2b^2 - a^2 = 1$.

Câu 24. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\cot\alpha$ là

(A) $\sqrt{3}$. (B) $-\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25. Biết $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $\cos\alpha < 0$. Tính giá trị của $\tan\alpha$.

(A) $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. (B) $\tan\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$. (D) $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Câu 26. Cho $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$ ở đó $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\sin\alpha$.

(A) $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$. (B) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$. (C) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. (D) $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

Câu 27. Cho $\cot\alpha = 3$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính giá trị của $\sin\alpha$.

(A) $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. (B) $\sin\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. (C) $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. (D) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 28. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, ở đó $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị biểu thức $M = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

(A) $M = \dfrac{24}{25}$. (B) $M = -\dfrac{24}{25}$. (C) $M = -\dfrac{12}{25}$. (D) $M = \dfrac{12}{2}$.

Câu 29. Cho $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn điều kiện $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\dfrac{4}{5}$. Tính giá trị của $\sin\alpha$.

(A) $\sin\alpha = \dfrac{3}{2\sqrt{10}}$. (B) $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$. (C) $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. (D) $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 30. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$, ở đó $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Tính giá trị của $\tan\alpha$.

(A) $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$. (B) $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$. (C) $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. (D) $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 31. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\tan\alpha$.

(A) $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$. (B) $\tan\alpha = -\dfrac{5}{12}$. (C) $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$. (D) $\tan\alpha = -\dfrac{5}{12}$.

Câu 32. Cho $\sin\alpha = -\dfrac{2}{5}$ với $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính giá trị của $\tan\alpha$.

(A) $\tan\alpha = -\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$. (B) $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{21}}{21}$. (C) $\tan\alpha = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$. (D) $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$.

Câu 33. Cho $\cos\alpha = \dfrac{4}{13}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của $\sin\alpha$.

(A) $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$. (B) $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{17}}{13}$. (C) $\sin\alpha = -\dfrac{3\sqrt{17}}{13}$. (D) $\sin\alpha = -\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

Câu 34. Cho $\cot\alpha = -3$ với $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính giá trị của $\cos\alpha$.

(A) $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. (B) $\cos\alpha = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. (D) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 35. Cho $\tan\alpha = 4 + \sqrt{15}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính giá trị của $\cos\alpha$.

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{4}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{3}$.

Câu 36. Cho $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\tan\alpha$.

(A) $\tan\alpha = -\dfrac{8}{13}$. (B) $\tan\alpha = -\dfrac{8}{15}$. (C) $\tan\alpha = -\dfrac{8}{11}$. (D) $\tan\alpha = -\dfrac{8}{9}$.

Câu 37. Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ với $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính $\sin\alpha$.

(A) $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$. (B) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$. (C) $\sin\alpha = -\dfrac{16}{25}$. (D) $\sin\alpha = \dfrac{16}{25}$.

Câu 38. Cho $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ với $\alpha \in \left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Tính $\cos\alpha$.

(A) $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. (C) $\cos\alpha = -\dfrac{16}{25}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{16}{25}$.

Câu 39. Cho $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \tan\alpha\cot^2\alpha$.

(A) $P = \dfrac{1}{27}$. (B) $P = \dfrac{1}{9}$. (C) $P = \dfrac{1}{3}$. (D) $P = 3$.

Câu 40. Cho $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$. Tính $\cot\alpha$.

(A) $\cot\alpha = -\dfrac{2}{3}$. (B) $\cot\alpha = -\dfrac{3}{2}$. (C) $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{45}}{9}$. (D) $\cot\alpha = \dfrac{3}{2}$.

Câu 41. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ với $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin\alpha + \cos\alpha$.

(A) $P = \dfrac{1}{5}$. (B) $P = -\dfrac{1}{5}$. (C) $P = \dfrac{7}{5}$. (D) $P = -\dfrac{7}{5}$.

Câu 42. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

(A) $\cos 45^\circ = \sin 30^\circ\cos 15^\circ - \cos 30^\circ\sin 15^\circ$. (B) $\cos 45^\circ = \cos 30^\circ\cos 15^\circ + \sin 30^\circ\sin 15^\circ$.

(C) $\cos 45^\circ = \cos 30^\circ\cos 15^\circ - \sin 30^\circ\sin 15^\circ$. (D) $\cos 45^\circ = \sin 30^\circ\sin 15^\circ - \cos 15^\circ\cos 30^\circ$.

Câu 43. Cho $\sin\theta = -\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. Tính $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$.

(A) $-\dfrac{5}{13}$. (B) $-\dfrac{19}{50}$. (C) $-\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$. (D) $-\dfrac{3\sqrt{2}}{13}$.

Câu 44. Cho $\sin x=\dfrac{3}{5}, \sin y=\dfrac{4}{5}$, với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2}<y<\pi$. Tính giá trị $\sin(x-y)$.

A. $\sin(x-y)=-\dfrac{7}{25}$. B. $\sin(x-y)=-1$. C. $\sin(x-y)=1$. D. $\sin(x-y)=\dfrac{7}{25}$.

Câu 45. Cho $\tan a+\tan b=2$ và $\tan(a+b)=4$, giá trị của $\tan a.\tan b$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $-\dfrac{1}{2}$. C. 1. D. -1.

Câu 46. Cho $P=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2P=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. B. $\sqrt{2}P=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

C. $P=\sin x-\sqrt{3}\cos x$. D. $P=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x$.

Câu 47. Biết $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{6}-3}{6}$. B. $P=\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}$. C. $P=\dfrac{\sqrt{6}-3}{4}$. D. $P=\dfrac{\sqrt{6}+3}{4}$.

Câu 48. Cho $\cot\alpha=2$ và $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin\left(\alpha+\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

A. $-\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{5}}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{5}}$. C. $-\dfrac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{5}}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{5}}$.

Câu 49. Cho $\cos x=\dfrac{\alpha}{2}$. Tính $\cos 2x$.

A. $-1+\dfrac{\alpha^2}{2}$. B. $\dfrac{\alpha^2}{4}-1$. C. $-1+\dfrac{\alpha^2}{4}$. D. $-1-\dfrac{\alpha^2}{2}$.

Câu 50. Biết $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, tính $\cos 2\alpha$.

A. $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}$. B. $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}$. C. $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}$. D. $\cos 2\alpha=\dfrac{3}{4}$.

Câu 51. Biết $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}$ với $-\dfrac{\pi}{4}<\alpha<0$, tính $\cos^2\alpha$.

A. $\cos^2\alpha=\dfrac{5}{8}$. B. $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{8}$. C. $\cos^2\alpha=\dfrac{3}{8}$. D. $\cos^2\alpha=\dfrac{7}{8}$.

Câu 52. Biết $\cos 2\alpha=\dfrac{3}{8}$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, tính $\sin^2\alpha$.

A. $\sin^2\alpha=\dfrac{9}{16}$. B. $\sin^2\alpha=\dfrac{5}{16}$. C. $\sin^2\alpha=\dfrac{3}{16}$. D. $\sin^2\alpha=\dfrac{11}{16}$.

Câu 53. Cho góc $\alpha=\dfrac{11\pi}{5}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, để $\alpha\in(-18;-12)$ thì giá trị của k bằng bao nhiêu?

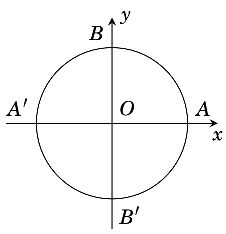
A. -8. B. -7. C. -6. D. -5.

Câu 54. Trên đường tròn bán kính $R=8$ cm, lấy cung có số đo 54°. Tính độ dài ℓ của cung tròn.

A. $\ell=7{,}54$ cm. B. $\ell=5{,}74$ cm. C. $\ell=4{,}75$ cm. D. $\ell=7{,}47$ cm.

Câu 55.

Cung lượng giác α được biểu diễn bởi điểm nào trên đường tròn lượng giác thì $\sin\alpha=0$?



A. Điểm B và điểm B'. B. Điểm O.

C. Điểm A và điểm A'. D. Các điểm A, A', B, B'.

Câu 56. Trong một ngày, kim giờ và kim phút gặp nhau bao nhiêu lần?

A. 24 lần. B. 23 lần. C. 22 lần. D. 21 lần.

Câu 57. Bánh xe máy có đường kính (kể cả lốp xe) 55 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

(A) 8,04 vòng. (B) 8,03 vòng. (C) 8,02 vòng. (D) 8,01 vòng.

Câu 58. Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{\sin^2 x - 2\sin x.\cos x}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}$.

(A) $A = 4$. (B) $A = 0$. (C) $A = 1$. (D) $A = 2$.

Câu 59. Cho $\cot\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$.

(A) $M = -\dfrac{35}{16}$. (B) $M = -\dfrac{35}{32}$. (C) $M = -\dfrac{3}{16}$. (D) $M = -\dfrac{3}{32}$.

Câu 60. Cho $\sin x + \cos x = m$. Tính theo m giá trị của $A = \sin x.\cos x$.

(A) $A = m^2 - 1$. (B) $A = \dfrac{m^2 - 1}{2}$. (C) $A = \dfrac{1}{m^2 - 1}$. (D) $A = m^2 + 1$.

—HẾT—

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. A	2. A	3. C	4. B	5. C	6. B	7. D	8. B	9. C	10. D
11. C	12. D	13. D	14. B	15. C	16. B	17. B	18. A	19. D	20. C
21. A	22. B	23. C	24. B	25. A	26. C	27. D	28. B	29. C	30. A
31. D	32. B	33. B	34. A	35. B	36. B	37. B	38. A	39. C	40. D
41. B	42. C	43. C	44. B	45. A	46. A	47. A	48. A	49. A	50. A
51. A	52. B	53. B	54. A	55. C	56. C	57. A	58. B	59. A	60. B